Пусть l – нецелое положительное число и $[l]$ – его целая часть. Банахово пространство $H^l(\overline{\Omega})$ состоит из непрерывных в $\overline{\Omega}$ функций $u(x)$, которые имеют в $\overline{\Omega}$ непрерывные производные до порядка $[l]$ включительно и для которых величина

$$|u|_{\Omega}^{(l)} = \langle u\rangle_{\Omega}^{(l)} + \sum_{j=0}^{[l]} \langle u\rangle_{\Omega}^{(j)} \tag{1}$$

конечна, где

$$\langle u\rangle_{\Omega}^{(0)} = |u|_{\Omega}^{(0)} = \max\nolimits_{\Omega}|u|,$$

$$\langle u\rangle_{\Omega}^{(j)} = \sum_{m\leqslant j} |D_x^m u|_{\Omega}^0, \quad \langle u\rangle_{\Omega}^{(l)} = \sum_{|m|\leqslant[l]} \langle D_x^{[m]} u\rangle_{\Omega}^{(l-[l])},$$

мы используем мультииндексные обозначения: $m = (m_1, \ldots, m_n)$, $|m| = m_1 + \ldots + m_n$, $D_x^m = \prod(\partial/\partial x_i)^{m_i}$.

Равенство (1) определяет норму в $H^l(\overline{\Omega})$. Обозначим через $H^{l,l/2}(Q_T)$ банахово пространство функций $u(x,t)$, непрерывных в $\overline{Q}_T$ вместе со всеми производными вида $D_t^r D_x^s u$ при $2r + |s| < l$ и с конечной нормой

$$|u|_{Q_T}^{(l)} = \langle u\rangle_{Q_T}^{(l)} + \sum_{j=0}^{[l]} \langle u\rangle_{Q_T}^{(j)}. \tag{2}$$

Мы будем рассматривать пространства $H^l(\overline{\Omega})$ и $H^{l,l/2}(\overline{Q}_T)$ при $l = 2+\alpha$ и $l = 1+\alpha$, $\alpha \in (0,1)$.

Обозначим через Σ_T множество точек (x,t), $x \in \Gamma$, $t \in [0,\tau]$. Стандартным образом вводятся пространства $H^l(\Gamma)$ и $H^{l,l/2}(\Sigma_T)$.

Рассматривается следующая задача: ищется такая функция $\omega(x,t)$, что

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dx_i} a_i(x,\omega,\omega_x) = 0, \quad (x,t) \in Q_T, \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x,\omega,\omega_x)\cos(n,x_i) + \omega_t = f(x,t), \quad (x,t) \in \Sigma_T, \tag{4}$$

$$\omega(x,0) = \omega_0(x), \quad x \in \Gamma, \tag{5}$$

где n – нормаль к Γ, внешняя по отношению к Ω. В предположении, что выполнены условия

$$\sum_{i=1}^{n} a_i p_i \geqslant \nu p^2, \quad f, f_x \in L_\infty(Q_T), \tag{6}$$

где $\nu = \nu(|\omega|)$ – положительная непрерывная функция, в работе получены априорные оценки для $\max|\omega|, \max|\omega_x|, \max|\omega_t|$ на Q_T решения задачи (3)–(5) и доказана гельдеровость функций $\omega, \omega_x, \omega_t$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.

КОНЕЧНАЯ ИНТЕГРАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ И НЕКОТОРЫЕ ФОРМУЛЫ ОБРАЩЕНИЯ

© С.В. Кольцова, С.В. Поленкова

Интегральная геометрия (в смысле Гельфанда) изучает интегральные преобразования, ставящие в соответствие функциям на многообразии X их интегралы по подмногообразиям из некоторого семейства Y. Таким образом, эти преобразования переводят функции на X в функции на Y. Основные задачи состоят в описании образов и ядер этих преобразований и нахождении формул обращения, если это возможно. Вместо функций можно рассматривать другие объекты (дифференциальные формы и т.д.). Интегральная геометрия связана с различными областями математики (теория представлений групп Ли, дифференциальные уравнения, интегральные операторы Фурье, обобщенные функции и т.д.), она имеет приложения в физике, технике, геологии, медицине (томография) и др.

С другой стороны, аналогичные конструкции могут быть применены к дискретным, в частности, конечным множествам. Такую теорию можно назвать *конечной (дискретной) интегральной геометрией.*

Сформулируем общие задачи конечной интегральной геометрии. Пусть M – конечное множество. Пусть X и Y – два набора его подмножеств. Для некоторых пар $(x, y) \in X \times Y$ определено отношение инцидентности $R \subset X \times Y$. Преобразование I ставит в соответствие функции f на X функцию If на Y по формуле

$$(If)(y) = \sum_{(x,y)\in R} f(x).$$

Требуется описать образ и ядро (нулевое подпространство) этого преобразования I и найти формулу обращения, если ядро нулевое. Эти задачи можно рассмотреть в несколько более общей ситуации: пусть $c(x, y)$ – некоторая функция на $X \times Y$, тогда

$$(If)(y) = \sum_{(x,y)\in R} c(x, y) f(x).$$

В частности, "оператор Лапласа" на графе укладывается в эту схему: множества X и Y совпадают с множеством вершин графа, две вершины инцидентны, если они соседние, т.е. соединены ребром, функция $c(x, y)$ зависит только от y и равна $1/d(y)$, где $d(y)$ – количество вершин, соседних с y.

Если на множествах X и Y действует группа G, так что преобразование I сплетает представления группы G в функциях на X и Y, то возникает задача о разложении ядра и образа этого преобразования I на неприводимые подпространства. В частности, если даже ядро не равно нулю, интересно найти формулу обращения для функций из ортогонального подпространства.

С другой стороны, конечная интегральная геометрия может служить источником новых идей для классической интегральной геометрии: например, задача о нахождении формулы обращения для функций, ортогональных ядру, и т.д.

В [1] нами получена формула обращения для преобразования, которое функциям на множестве вершин n-мерного симплекса ставит в соответствие их "интегралы" по k-мерным граням (интеграл по грани есть сумма значений функции на вершинах этой грани).

Данная работа является продолжением и обобщением [1]. Нами получена явная формула обращения "интегрального" преобразования, которое функциям на k-элементных подмножествах n-элементного множества ставит в соответствие их интегралы по l-элементным подмножествам, $k < l, k + l = n$. Точные определения см. ниже.

Пусть M – множество с n элементами (точками). Количество элементов конечного множества A будем обозначать $|A|$. Обозначим через H^k множество всех подмножеств множества M с k элементами, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ (так что $H^0 = \emptyset, H^n = \{M\}$). Обозначим через $L(H^k)$ пространство функций на H^k (со значениями в некотором поле или кольце). Определим преобразование $I_{lk} : L(H^k) \longrightarrow L(H^l)$, $k < l$, формулой

$$(I_{lk} f)(y) = \sum_{x\subset y} f(x), \quad x \in H^k, \ y \in H^l.$$

При $k + l > n$ формулы обращения для I_{lk} не существует, так как тогда $|H^k| > |H^l|$. Поэтому считаем $k + l \leqslant n$. При $k + l < n$ формулу обращения мы написать можем, но многими разными способами. Основным случаем является $k+l = n$. Тогда $|H^k| = |H^l|$ и I_{lk} есть изоморфизм. К этому случаю может быть сведен случай $k + l < n$.

Т е о р е м а 1. *Пусть* $1 \leqslant k < l$, $k + l = n$. *Имеет место следующая формула обращения для* I_{lk}:

$$f(x) = \begin{pmatrix} l \\ l-k \end{pmatrix}^{-1} \sum_{m=0}^{k} \frac{(k-l)^{(m)}}{k^{(m)}} \sum_{|x\cap y|=k-m} (I_{lk} f)(y).$$

Здесь мы использовали обозначение $a^{(m)} = a(a-1)\ldots(a-m+1)$.

Эту теорему можно переформулировать так. Определим оператор $I_{kl}^{(p)} : L(H^l) \longrightarrow L(H^k)$ формулой:

$$(I_{kl}^{(p)}\varphi)(x) = \sum_{|x \cap y| = p} \varphi(y).$$

Тогда при $1 \leqslant k < l$, $k+l = n$, имеет место следующее разложение единичного оператора E в $L(H^k)$:

$$E = \begin{pmatrix} l \\ l-k \end{pmatrix}^{-1} \sum_{m=0}^{k} \frac{(k-l)^{(m)}}{k^{(m)}} (I_{kl}^{(k-m)}) I_{lk}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кольцова С.В., Поленкова С.В.* Интегральная геометрия на n-мерном симплексе // Вестн. Тамб. ун-та. Сер. Естеств. и техн. науки. Тамбов, 2004. Т. 9. Вып. 4. С. 409–415.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при поддержке грантов Минобр. РФ Е02-1.0-156, НТП "Университеты России" ур.04.01.052, НИР темплана 01.002.2.

ОБ ОДНОЙ ФОРМУЛЕ ОБРАЩЕНИЯ КОНЕЧНОЙ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

© С.В. Кольцова, С.В. Поленкова

Основные задачи конечной интегральной геометрии были сформулированы в [1]. В настоящей работе мы пишем формулу, восстанавливающую функцию на k-гранях в n-симплексе по ее интегралам по l- граням с использованием всех $l > k$.

Пусть M – множество, состоящее из n элементов (точек). Количество элементов в конечном множестве x мы обозначаем через $|x|$. Пусть H^k, $k = 0, 1, \ldots, n$, – совокупность подмножеств $x \subset M$ с $|x| = k$. Пусть $L(H^k)$ – пространство функций на H^k со значениями в $\mathbb{C}$. Определим оператор ("интегрирование") $I_{lk} : L(H^k) \longrightarrow L(H^l)$ формулой:

$$(I_{lk})(y) = \sum_{|x \cap y| = \min\{k,l\}} f(x).$$

Для $l > k$ и $l < k$ имеем, соответственно,

$$(I_{lk}f)(y) = \sum_{x \subset y} f(x), \quad (I_{lk}f)(y) = \sum_{x \supset y} f(x),$$

кроме того, $I_{kk} = E$ (тождественное преобразование). Введем в $L(H^k)$ скалярное произведение:

$$(f, g)_k = \sum_{x \in H^k} f(x)\overline{g(x)}.$$

Операторы I_{kl} и I_{lk} сопряжены:

$$(I_{lk}f, \varphi)_l = (f, I_{kl}\varphi)_k.$$

Т е о р е м а. *Пусть $1 \leqslant k < n/2$. Всякая функция $f \in L(H^k)$ восстанавливается по ее "интегралам" $I_{lk}f, l > k$, следующим образом:*

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n-k} (-1)^{j+1} (I_{k,k+j} I_{k+j,k} f)(x),$$

или, в операторной форме:

$$E = \sum_{j=1}^{n-k} (-1)^{j+1} I_{k,k+j} I_{k+j,k}. \tag{1}$$